UNIVERSITE MOHAMED I

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE
OUJDA

Année Universitaire 2006/07
Section: SMP-SMC (S_1)
Session de Janvier
Durée: 1H 30

Examen Math1 (algèbre)

Exercice 1

1. *Factoriser dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $P(X) = X^2 - X - 2$.
2. *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$ *la fraction rationnelle*
$$F(X) = \frac{X+3}{X^2 - X - 2}.$$
3. *En utilisant l'algorithme d'Euclide*
   (a) *Montrer que les polynômes*
   $$A(X) = X^2 - 2X + 2 \text{ et } B(X) = X^2 - X - 2$$
   sont premiers entre eux.
   (b) *Donner deux polynômes* U *et* V *tels que* $UA + VB = P.G.C.D(A, B)$.
4. *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$ *la fraction rationnelle*
$$G(X) = \frac{10}{(X^2 - 2X + 2)(X^2 - X - 2)}.$$
5. *Décomposer* $G(X)$ *en éléments simples dans* $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 2 *Soit le* $\mathbb{R} - e.v.\mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique*
$$B = \{e_1 = (1,\ 0,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0),\ e_3 = (0,\ 0,\ 1)\},$$
et f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par:*
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x - z, y + z, x + y + z) \end{array}$$

1. *Montrer que* f *est une application linéaire. Donner la matrice de* f *dans la base* B.
2. *Déterminer Ker* f, *et déduire Im* f.
3. *Soient* $v_1 = e_1 + e_2,\ v_2 = e_2 + e_3,\ v_3 = e_2$. *Montrer que* $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Donner la matrice de passage de* B *à* B'.
5. *Donner la matrice de* f *dans la base* B'.
6. *Calculer* $f(v_i), 1 \le i \le 3$, *dans la base* B' *et retrouver la question* 5.) *précedente.*

Fin